

**ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С КОРОТКОЗАМКНУТЫМИ ВТОРИЧНЫМИ ОБМОТКАМИ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ**

*У статті аналізуються проблема, пов'язана з питаннями коректного завдання первинних джерел струмів і помилок у визначенні параметрів вторинних короткозамкнених контурів при вирішенні задач плоскопаралельного поля. Наводяться фізичний і математичний аналіз помилки та запропоновано спосіб вирішення подібних завдань на прикладі розрахунку трансформатора струму і електромагніту змінного струму. Бібл. 3, рис. 11.*

**Ключові слова:** плоскопаралельне магнітне поле, граничні умови.

*В статье анализируются проблема, связанная с вопросами корректного задания первичных источников токов и ошибок в определении параметров вторичных короткозамкнутых контуров при решении задач плоскопаралельного поля. Приводятся физический и математический анализ ошибки и предложен способ решения подобных задач на примере расчета трансформатора тока и электромагнита переменного тока. Библ. 3, рис. 11.*

**Ключевые слова:** плоскопараллельное магнитное поле, граничные условия.

**Введение и постановка проблемы.** В практике расчетов магнитных систем электрических аппаратов довольно часто встречаются задачи, в которых присутствуют вторичные короткозамкнутые обмотки (например, трансформаторы тока, электромагниты с короткозамкнутыми витками и пр.). Подобные задачи часто решают в плоскопараллельной постановке. При этом корректность решения таких задач сильно зависит от способа задания первичных источников поля и способа задания граничных условий. Так как реальные магнитные системы электрических аппаратов не являются двухмерными, то любая плоскопараллельная постановка задачи будет в той или иной мере приближенной, а некорректное задание первичных источников и граничных условий увеличивает погрешность полученных результатов.

Например, при расчетах магнитных систем трансформаторов тока иногда и первичная, и вторичная обмотки рассматриваются как бесконечные проводники [1], как это показано на рис. 1.

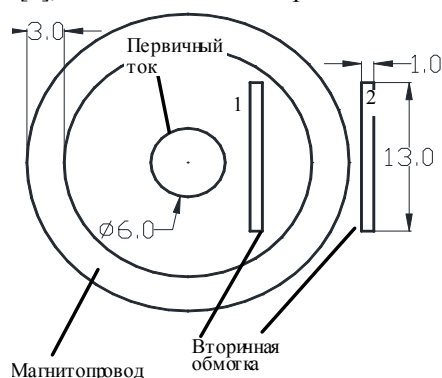


Рис. 1. Расчетная схема: 1, 2 – проводники вторичной катушки (все размеры указаны в мм)

Ошибка такой расчетной схемы заключается в способе задания контура первичного тока, который состоит из одного бесконечного провода. Ток провода задается в соответствии с условиями задачи и должен определяться параметрами источника и нагрузки.

Из физических соображений понятно, что ток в такой системе (рис. 1) протекать не будет по причине отсутствия обратного провода, но задача может быть решена в программе, например в [2]. Рассмотрим, что из этого следует.

Исходными данными расчета являются:

- ток первичной цепи;
- материал магнитопровода;
- материал плоских шин, имитирующих вторичную обмотку трансформатора;
- свойства окружающей среды;
- граничные условия.

Решение задачи может быть получено методом конечных элементов при помощи программы Femm [2].

Для получения однозначного решения задача (рис. 1) должна быть дополнена внешней границей, на которой задается одно из граничных условий:

- нулевое значение векторного магнитного потенциала на достаточно удаленной границе;
- имитация бесконечно удаленной границы заданием некоторого значения векторного магнитного потенциала;
- имитация бесконечной границы с помощью преобразования Кельвина, как указано в [2].

В расчете первичный ток принимался равным 100 А при частоте 50 Гц в квазистационарном приближении. Магнитопровод – шихтованная электро-техническая сталь с толщиной пластин 0,15 мм и нелинейной характеристикой намагничивания.

При любом из указанных выше граничных условий расчет показывает, что токи первого и второго проводника вторичной обмотки неодинаковы и равны  $-99,5 - j \cdot 3,0$  А для первого и  $-0,11 + j \cdot 0,002$  А для второго проводников (рис. 1).

Но такого быть не должно, так как проводники являются частями одной вторичной обмотки и должны обтекаться одним током.

**Математическая постановка задачи.** Проанализируем задачу [1].

Уравнение для векторного магнитного потенциала для плоскопараллельного поля [3] запишется:

$$\frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial y^2} = -\mu \cdot \delta_z(x, y), \quad (1)$$

где  $A_z$  – векторный магнитный потенциал;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $\delta_z$  – плотность тока.

Решение уравнения (1) при низких частотах для точки  $z = 0$  можно записать [3]:

$$A_z(x, y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\delta_z(x_0, y_0, z_0)}{r} \cdot dV_0 \right), \quad (2)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты нити с плотностью тока  $\delta_z(x_0, y_0, z_0)$ ;  $V_0$  – объем проводника с плотностью тока  $\delta_z(x_0, y_0, z_0)$ ;  $L$  – длина проводника с током;  $r$  – расстояние от нити с плотностью тока  $\delta_z(x_0, y_0, z_0)$  до точки вычисления поля с координатами  $x, y$ .

Интегрирование уравнения (2) приводит к результату [3]:

$$A_z(x, y) = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \int_S \frac{\delta_z(x_0, y_0)}{r} \cdot dS_0 + \lim_{L \rightarrow \infty} C, \quad (3)$$

где при больших значениях  $L$ :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \Sigma i \cdot \ln(L). \quad (4)$$

Если полный ток ( $\Sigma i$ ), протекающий сквозь сечение всех проводников, отличен от нуля, то значение векторного магнитного потенциала в бесконечно удаленной точке не равно нулю и принимать его таковым нельзя.

Очевидно, что во всех практических расчетах должно выполняться условие:

$$\Sigma i = 0. \quad (5)$$

Следовательно, для получения правильных расчетных данных при решении задач плоскопараллельного магнитного поля методом конечных элементов необходим учет обратного провода (т.е. выполнение условия (5)) и соответствующая формулировка граничных условий.

**Цель статьи** – исследование особенностей, возникающих в задачах расчета плоскопараллельного поля в электрических аппаратах с короткозамкнутыми вторичными контурами.

Учет обратного провода и выполнение условия (5) моделируется с помощью преобразования Кельвина, которое отображает внешнее пространство на внутреннюю область второй окружности (рис. 2).

Расчеты проведенные по предложенной модели показывают что алгебраическая сумма токов вторичной обмотки практически равна нулю (абсолютная ошибка имеет порядок  $10^{-6}$  А при токе в 100 А).

При некорректной физической постановке задачи ток в проводнике 1 вторичной обмотки (как указывалось ранее) имеет практически правильное значение:  $-99,5 - j3,0$  А. Причина этого заключается в том, что в основе метода конечных элементов лежит минимизация функционала энергии поля, т.е. фундаментальный физический закон, на основании которого система пытается исправить физическую некорректность задачи (отсутствие обратного провода) путем «подбора» значений токов вторичного контура.

Картины магнитного поля для рассмотренных вариантов при одинаковом первичном токе показаны на рис. 3.

Значимость задания граничных условий и корректность постановки задачи в плоскопараллельных полях можно проиллюстрировать на примере расчета

Ш-образного электромагнита переменного тока, половина которого показана на рис. 4 (все размеры приведены в мм).

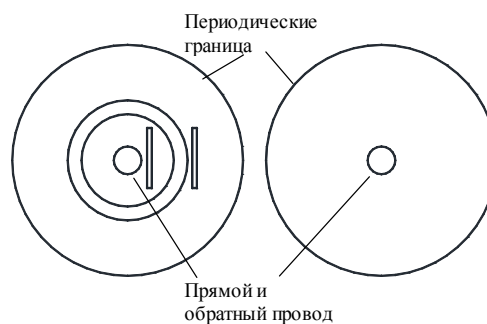


Рис. 2. Расчетная модель

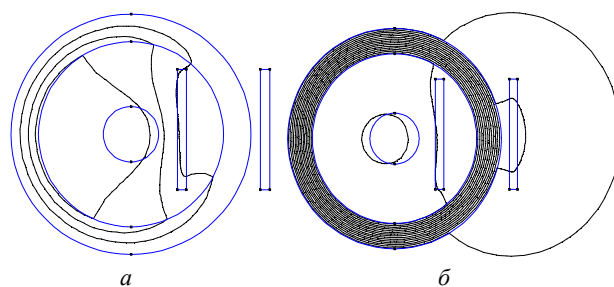


Рис. 3. Картина поля для некорректного (а) и корректного (б) вариантов расчета

Граничные условия:  $A = 0$  на границе симметрии и ряд условий, описанных ниже, на внешней границе. Частота сети равна 50 Гц, короткозамкнутые витки 2 охватывают часть боковых стержней магнитопровода.

Размеры рассчитываемого магнита были сняты с реального магнита, стоящего на лабораторном стенде.

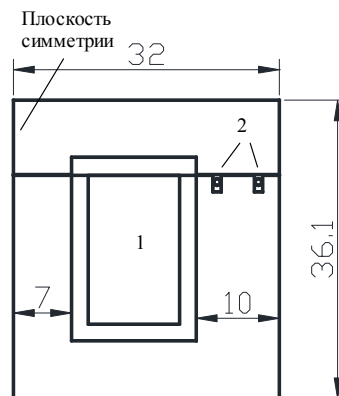


Рис. 4. Размеры электромагнита переменного тока с короткозамкнутыми витками на крайних стержнях: 1 – катушка; 2 – короткозамкнутые витки; глубина магнита – 18 мм

Расчет проводился для шихтованного магнитопровода в квазистационарном режиме, МДС катушки – 400 А.

Результаты расчета при любых внешних граничных условиях (за исключением, естественно, границы симметрии) – ноль поля на удаленной границе, имитация бесконечного пространства, задание значения потенциала на удаленной границе, и т.п. показывают: алгебраическая сумма токов в короткозамкнутом витке не равна нулю. Результат расчета тока в витке будет аналогичным и при решении задачи для всей конструкции магнита в целом.

Расчетные значения токов в разных частях одного витка:

- внутренняя часть  $(-48,6-j86,7)$  А;
- внешняя часть витка  $(-24-j22,5)$  А.

Более того, расчет дает неправильную картину поля, показанную на рис. 5 (полос, охваченный короткозамкнутым витком).

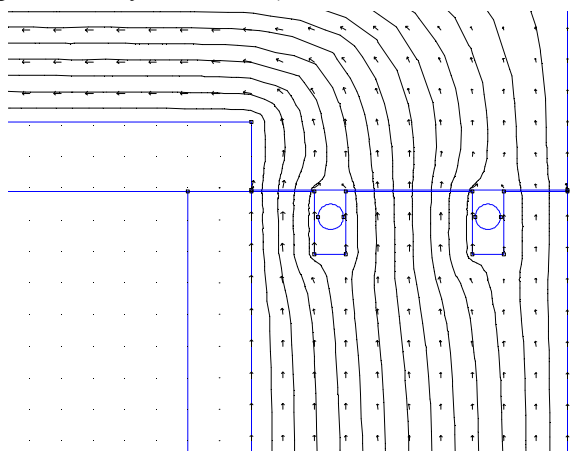


Рис. 5. Поле расщепленного полюса магнита

Из рис. 5 следует, что потоки в неэкранированных частях неодинаковы. На рис. 6. показана картина нормальной составляющей магнитной индукции под расщепленным полюсом.

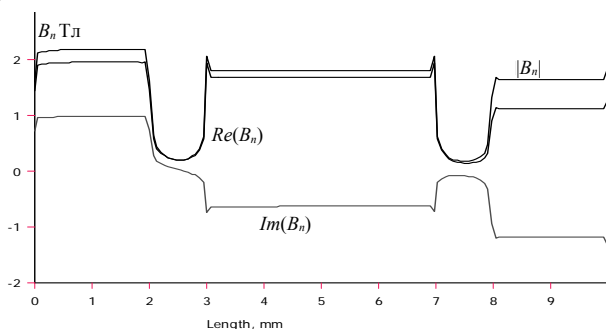


Рис. 6. Нормальная составляющая индукции под расщепленным полюсом по его длине

Как следует из рис. 6, в неэкранированных частях полюса векторы индукции имеют различные значения, направления и различный сдвиг по фазе. Электромагнитная сила, действующая на якорь, пульсирует с двойной частотой в пределах  $(41,1...356)$  Н, что недопустимо. Полученные значения подтверждают вывод о физической некорректности полученного решения задачи в плоскопараллельном поле методом конечных элементов в данной постановке.

Однако с математической точки зрения задача решена правильно. Если предположить, что среда однородна, а расстояния до точки наблюдения велико по сравнению с размерами сечения проводника, то уравнение (2) можно записать:

$$A_z(Q) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_L \frac{i(M) \cdot dz_M}{r_{QM}}, \quad (6)$$

где  $r_{QM}$  – расстояние от нити с током до точки наблюдения.

Из (4) следует: если точки, в которых вычисляется значение магнитного потенциала, находятся на

разных расстояниях от нити с током, то значения векторного потенциала в них разные. Следовательно, программа решает задачу правильно с математической точки зрения в рамках специфических условия плоскопараллельного поля.

В связи с этим была предпринята попытка добиться равенства токов в прямой и обратной ветви короткозамкнутого (кз) витка при помощи задания антисимметричных условий на их поверхностях. В результате расчетов равенство токов было получено. Но:

- значения токов в кз витке получились небольшими (порядка 40 А) и не обеспечивают требуемый сдвиг потоков в экранированной и неэкранированной частях полюса;
- картина магнитного потока в расщепленной части полюса не соответствует реальной картине поля (рис. 7);
- пульсация электромагнитной силы велика и не может обеспечить нормальную работу электромагнита  $(4,1...367)$  Н.

Следовательно, такой электромагнит работать не будет. Тем не менее, указанный электромагнит уже много лет используется при проведении лабораторных занятий и за все годы работы ни разу не выходил из строя.

Из чего можно сделать вывод: специфика задачи плоскопараллельного поля в указанной выше постановке не позволяет получить правильные результаты расчета токов в кз витке.

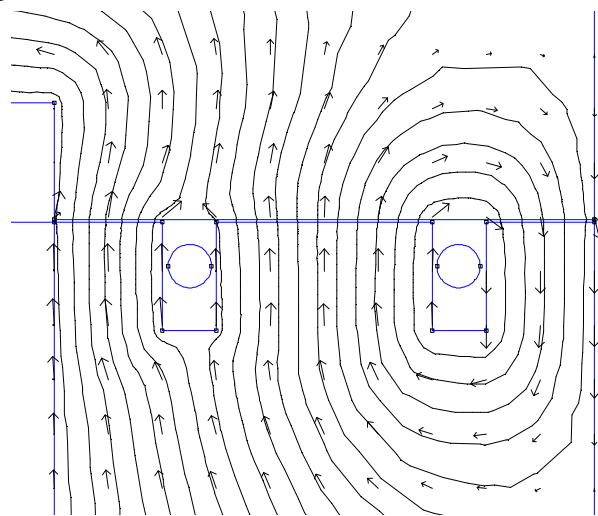


Рис. 7. Картина поля в расщепленной части полюса

Но расчеты электромагнитов переменного тока достаточно важны. Поэтому автором статьи предлагается следующая, не бесспорная, методика расчета электромагнита переменного тока методом конечных элементов в квазистационарном режиме. Предложенную методику можно и нужно критиковать, если имеются на то основания.

В качестве исходных положений примем следующее:

- программа правильно рассчитывает значения векторного магнитного потенциала, в том числе и внутри проводников кз витка;
- значения токов в ветвях кз витка должны быть одинаковыми и направленными противоположно, т.е. суммарный ток витка равен нулю.

Ожидаемые результаты:

- значения магнитных индукций и потоков одинаковы в неэкранированных частях полюса (размеры одинаковы);
- поток в экранированной части полюса отстает по фазе от потоков в неэкранированных частях;
- пульсации электромагнитной силы должны быть такими, чтобы обеспечивать нормальную работу электромагнита в притянутом положении якоря.

Дальнейшие рассуждения основаны на следующем.

Предположим, что в левом и правом проводниках кз витка усредненные комплексные значения векторного магнитного потенциала соответственно равны  $\dot{A}_z(Ql)$  и  $\dot{A}_z(Qp)$  и представляют собой поток на единицу длины. На основании второго уравнения Максвелла и условия  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  при отсутствии движения проводника и стороннего источника энергии, можно записать известное соотношение:

$$E_z = -\partial A_z / \partial t, \quad (7)$$

где  $E_z$  – вектор напряженности электрического поля;  $-\partial \vec{A} / \partial t$  – наведенное электрическое поле;  $A_z$  – векторный магнитный потенциал.

Вектор напряженности электрического поля в каждом проводнике кз витка с учетом квазистационарности процесса будет:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z(Ql) &= -j \cdot \omega \cdot \dot{A}_z(Ql) \\ \dot{E}_z(Qp) &= -j \cdot \omega \cdot \dot{A}_z(Qp) \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\omega$  – круговая частота.

Так как проводники кз витка замкнуты, а проводник – линейная структура, то суммарная напряженность электрического поля будет являться алгебраической суммой напряженностей с учетом направления обхода контура:

$$\dot{E} = \dot{E}_z(Ql) + \dot{E}_z(Qp). \quad (9)$$

Согласно закону Ома дифференциальной форме:

$$\dot{\delta}_z = \sigma \cdot \dot{E}_z, \quad (10)$$

где  $\dot{\delta}_z$  – плотность тока в проводнике;  $\sigma$  – удельная проводимость материала;  $\dot{E}_z$  – суммарная напряженность электрического поля.

Или

$$\dot{\delta}_z = \sigma \cdot (\dot{E}_z(Ql) + \dot{E}_z(Qp)). \quad (11)$$

Ток витка

$$Tok = \int_S \dot{\delta}_z \cdot dS. \quad (12)$$

В этом случае алгоритм решения задачи может быть следующим:

1. Задаем материал кз витка (медь) и проводим расчет задачи плоскопараллельного поля в квазистационарном режиме.
2. Определяем суммарный ток в проводниках кз витка интегрированием по левой и правой областям, определяя суммарный ток.
3. Полученное значение тока заносим в исходные данные, как сторонний ток ( $Tok_{kz}$ ).
4. Устанавливаем свойства областей кз витка – воздух.

5. Задаем ток кз витка, равный суммарному току ветвей ( $Tok_{kz}$ ) с определенным чередованием знаков, зависящим от направления тока в катушке: – плюс  $i\omega$ ; – минус  $Tok_{kz}$ ; – плюс  $Tok_{kz}$  в соответствии с физическим направлением потоков.

Изменение материала кз витка на непроводник необходимо для устранения наведенных токов, которые появляются в проводнике при протекании по нему стороннего тока.

По приведенной методике был проведен расчет электромагнита (рис. 4), показанный на рис.8.

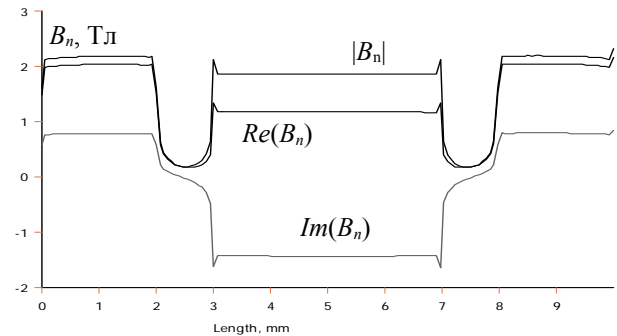


Рис. 8. Картина поля в расщепленной части по длине полюса

Как следует из рис. 8, картина поля в расщепленной части полюса соответствует физике процесса: равенство потоков в неэкранированных частях и отставание потока в экранированной части.

На рис. 9 показаны временные графики потоков в экранированной и неэкранированной части полюса в установившемся режиме.

Угол сдвига между потоками равен 71 электрическому градусу, что вполне соответствует реальным значениям (40...80)° с учетом того, что зазор между якорем и сердечником был принят равным 0,05 мм (шлифованные поверхности).

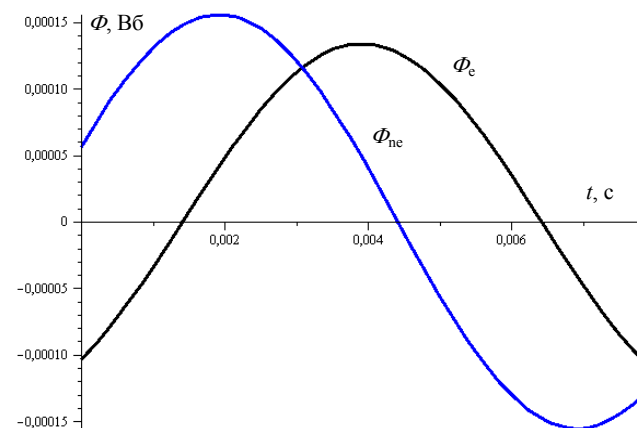


Рис. 9. Потоки в расщепленном полюсе

На рис. 10 приведен график электромагнитной силы в установившемся режиме.

Как следует из рис. 10, пульсация электромагнитной силы существует, как и в реальных магнитах. Максимальное значение силы – 354 Н; минимальное – 78 Н. Необходимо отметить, что пульсацию силы в данной задаче можно значительно уменьшить, увеличив сечение кз витка, что несколько увеличит его ток.



В конце необходимо отметить, если кз виток расположен на центральном стержне магнита и симметричен относительно плоскости симметрии (рис. 4), то все обозначенные выше проблемы с несимметричностью токов отпадают. На рис. 11 показана расчетная картина поля для этого случая. Стрелки показывают действительную и мнимую составляющую магнитной индукции. Электромагнитная сила при этом изменяется в диапазоне (70,5...305) Н.

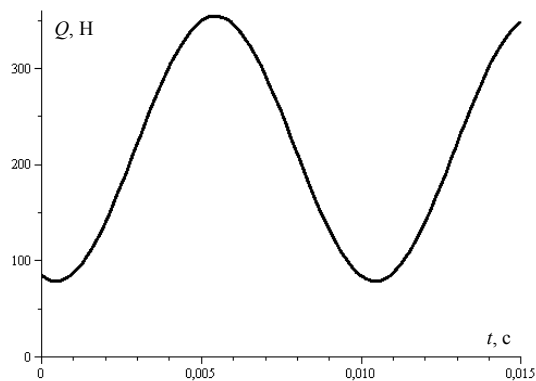


Рис. 10. Электромагнитная сила, действующая на якорь

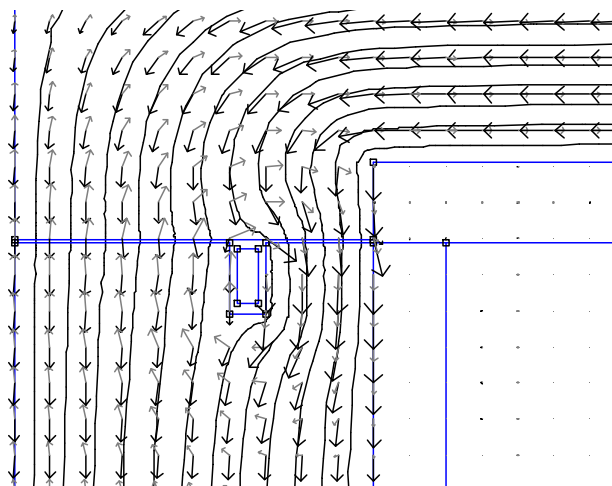


Рис. 11. Картина поля расщепленного полюса магнита с указанием направления действительной и мнимой составляющих магнитной индукции

### Выводы.

1. В связи со спецификой задач плоскопараллельного поля (неограниченность объема занимаемого током), требуется определенный подход к выбору граничных условий, которые должны соответствовать физике процесса.
2. При наличии замкнутых вторичных контуров, решение задачи плоскопараллельного поля методом конечных элементов дает для наведенных токов неправильный результат ввиду того, что метод принципиально не учитывает замкнутость контура.
3. Предложен метод, позволяющий обойти указанные выше ограничения и получить результат соответствующий физике процесса.
4. Угол сдвига потоков в расщепленной части полюса практически не зависит от значения МДС.
5. Уменьшить пульсацию силы можно увеличением сечения кз витка и выравнивание амплитуд потоков в расщепленном полюсе, что известно и подтверждается проведенными расчетами.

6. Симметричное расположение кз витка на центральном полюсе электромагнита значительно упрощает методику расчета плоскопараллельного поля магнита в квазистационарном режиме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клименко К.А. Исследование магнитного поля трансформаторов промышленной частоты с короткозамкнутыми витками: автореф. дис. ...канд. техн. наук / К.А. Клименко; Омск, 2013. – 20 с.
2. Meeker D. Finite Element Method Magnetics. FEMM 4.2. Режим доступа: [www.femm.info/wiki/HomePage](http://www.femm.info/wiki/HomePage).
3. Тозони О.В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. - Киев: Техника, 1967. – 251 с.

### REFERENCES

1. Klimenko K.A. *Issledovanie magnitnogo polia transformatorov promyshlennoi chastoty s korotkozamknutyimi vitkami*. Autoref. diss. kand. techn. nauk [A study of magnetic field of industrial frequency transformers with closed loop. Abstracts cand. tech. sci. diss.]. Omsk, 2013. 20 p. (Rus).
2. Meeker D. *Finite Element Method Magnetics. FEMM 4.2*. Available at: [www.femm.info/wiki/HomePage](http://www.femm.info/wiki/HomePage) (accessed 10 July 2010).
3. Tozoni O.V. *Raschet elektromagnitnykh polei na vychislitel'nykh mashinakh* [Calculation of electromagnetic fields on computers]. Kiev, Tekhnika Publ., 1967. 251 p. (Rus).

Поступила (received) 20.05.2015

Байда Евгений Иванович, к.т.н., доц.,  
Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,  
тел/phone +38 057 7076976, e-mail: baida\_kpi@mail.ru

E.I. Baida

National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
21, Frunze Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

### Peculiarities of calculation of magnetic systems with short-circuited secondary windings in in-plane formulation.

**Introduction.** A feature of quasi-static calculation of plane electromagnetic fields is unlimited volume occupied by the current. This condition imposes certain requirements on the choice of boundary conditions for solving such problems (the vanishing of the algebraic sum of the currents flowing through the cross section of all wires), failure of which leads to incorrect results.

**Purpose.** The mathematical formulation of the boundary conditions corresponding to real physical processes in solving problems of plane quasi-static field by Kelvin transformation and development of a technique for calculating the induced currents in closed circuits in the calculation of AC electromagnet in the quasi-static mode. **Methods.** Investigation of nonlinear model of the current transformer in in-plane electromagnetic field calculation and the AC electromagnet is carried by the finite element method using a specific software package. **Results.** A possible error in the boundary conditions and summarizes the estimated model corresponds to the physics of the process using the Kelvin transform, proposed method of calculating currents in closed loop AC electromagnet in the calculation of plane problems of the field. **Conclusions.** The specificity of the problem of calculating the electromagnetic field in in-plane formulation requires a special approach to the assignment of boundary conditions and calculation of the currents induced in a closed loop. References 3, figures 11.

**Key words:** in-plane magnetic field, boundary conditions.